Rechnen mit Wurzeln

Quadratwurzeln:

Definition:
Die positive Lösung der Gleichung: $x^2 = a,\ a \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}$ heißt Quadratwurzel aus a.
Schreibweise: $\sqrt{a}$ Bezeichnung von a: Radikand

Beispiel: $x^2 = 10\ ; x_1 = \sqrt{10} \vee x_2 = -\sqrt{10}$

Allgemein:

Potenzen werden radiziert (Wurzel ziehen), indem man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividiert und die Basis beibehält.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \textit{für } a \in \mathbb{R}^+ \textit{ und } m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}^+$$

Beispiele:

Faktor aus der Wurzel ziehen

a) $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt{28}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 7}}{2} = \frac{2\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}$

Den Nenner wurzelfrei machen

a) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

b) $\frac{-2}{\sqrt{2}-2} = \frac{-2\left(\sqrt{2}+2\right)}{\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}+2\right)} = \frac{-2\left(\sqrt{2}+2\right)}{2-4} = \sqrt{2}+2$

Zusammenfassung der Potenzgesetze

Multiplikation und Division bei gleichen Basen:	$a^m \cdot a^n = a^{a+b}$	$a \in \mathbb{R}$	$m, n \in \mathbb{Q}$
	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a \in \mathbb{R}^+$	$m, n \in \mathbb{Q}$
bei gleichen Exponenten	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$a, b \in \mathbb{R}^+$	$n \in \mathbb{Q}$
	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$a, b \in \mathbb{R}^+$	$n \in \mathbb{Q}$
Potenzieren von Potenzen	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$a \in \mathbb{R}$	$m, n \in \mathbb{Q}$
Radizieren von Potenzen	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a \in \mathbb{R}^+$	$m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}^+$
Folgerungen aus den Potenzgesetzen:	$a^0 = 1 \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$a \in \mathbb{R}^+$	$n \in \mathbb{Q}$

Aufgaben:

Rechenbeispiele:

a) $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3 \cdot 3 \cdot 3} = 3$

b) $\sqrt{2}\sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$

c) $\sqrt{8\,a^3} = \sqrt{4a^2 \cdot 2a} = 2a\sqrt{2a}\ \ , a \geq 0$

d) $3\sqrt{27} = \sqrt{3^2}\,\sqrt{27} = \sqrt{3^2 \cdot 27} = \sqrt{243}$

e) $2\sqrt{5} - 7\sqrt{5} = -4\sqrt{5}$

f) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

weitere Aufgaben:

1. Vereinfachen Sie:

a) $\sqrt[3]{24}$

b) $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{25}$

c) $\sqrt[3]{k^2} \times \sqrt[3]{k^2} \times \sqrt[3]{k^5}$

d) $\sqrt[4]{25^3} \cdot \sqrt[4]{5^2}$

2. Vereinfachen Sie und geben Sie das Ergebnis als Wurzel an:

a) $a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}}$

b) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5$

c) $\sqrt[3]{a^4} \cdot \sqrt[4]{a^3}$

d) $a^2\sqrt{a} + 4a\sqrt{a^3} + a^{2,5}$

3. Berechnen Sie die Kantenlänge (a) sowie die Oberfläche (O) eines Würfels mit einem Volumen von 15 Liter.

4. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

   a) $\left(c\sqrt{c+d} - d\sqrt{c-d}\right)^2 - \left(d\sqrt{c+d} - c\sqrt{c-d}\right)^2$

   b) $3\sqrt{2z^3u^2} - \sqrt{8z^3u^2} + \sqrt{72z^3u^2}$

Lösungen:

1a) $2\sqrt[3]{3}$ 1b) 5 1c) k^3 1d) 5^2 2a) $\sqrt{(ab)^3}$ 2b) $x^2\sqrt{x}$
2c) $\sqrt[12]{a^{25}}$ 2d) $6\sqrt{a^5}$ 3) $a = 24{,}66;\ O = 3649{,}32$ 4a) $2c^{2d} - 2d^3$
4b) $7zu\sqrt{2z}$