Quadratische Gleichungen

Bei quadratische Gleichungen kommt immer ein x^2 Term vor.

Beispiele

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$2x^2 - 3x - 4 = 2x$$
$$4x^2 - 4x + 4 = 3x^2 - 2x$$
$$x^2 = x + 3$$

Man kann jede Quadratische Gleichung so umformen, dass auf einer Seite der Gleichung die Null steht.

$$2x^2 - 3x - 4 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 4 = 0$$
$$4x^2 - 4x + 4 = 3x^2 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 4 = 0$$

Allgemeine Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Die Parameter a, b und c lassen sich durch eine beliebige Zahlen ersetzen und man erhält eine konkrete quadratische Gleichung. $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $b, c \in \mathbb{R}$.

Allgemeine Lösungsformel

Um eine quadratische Gleichung zu lösen gibt es eine Lösungsformel. Bekannt auch als „Lösungsformel“, „quadratische Lösungsformel“ und „Mitternachtsformel“.

Wichtig: Auf einer Seite muss die Null stehen, man braucht also die allgemeine Form.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Das $x_{1,2}$ steht für zwei Lösungen: x_1 bekommt man wenn man bei dem $\pm$ das $+$ (Plus) rechnet. x_2 bekommt man durch eine entsprechende – (Minus) Rechnung

Bei quadratischen Gleichungen können bis zu zwei Lösungen vorhanden sein. Es kann aber auch passieren, dass es nur eine Lösung oder auch gar keine Lösung gibt. Das hängt von dem Ausdruck unter der Wurzel ab. Diesen Ausdruck nennt man Diskriminante D.

$$D = b^2 - 4ac$$

Anzahl der Lösungen

Durch den Wurzel Term ergeben sich drei Möglichkeiten, je nachdem ob die Zahl unter der Wurzel negativ, positiv oder Null ist.

1. $D < 0$: Die Diskriminante ist negativ. Dann würde unter der Wurzel etwas Negatives stehen. Dies ist nicht möglich. Deshalb hat die quadratische Gleichung dann keine Lösung.
2. $D = 0$: Die Diskriminante ist genau Null. $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}$. Der $\pm$ Term fällt weg und es bleibt nur noch eine Lösung übrig.
3. $D > 0$: Die Diskriminante ist positiv. Es ergeben sich zwei Lösungen $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ und $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Beispiel

$$3x^2 + 2x - 60 = x^2$$

Dies ist eine quadratische Gleichung, da ein x^2 Term vorkommt. Die Gleichung kann man noch nicht lösen, da erst auf einer Seite die Null stehen muss. ($-x^2$ auf beiden Seiten)

$$2x^2 + 2x - 60 = 0$$

Die Gleichung ist nun in der allgemeinen Form.$ax^2 + bx + c = 0$. Mit $a = 2, b = 2, c = -60$.

Die Zahlen setzt man nun in die Lösungsformel ein.

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-60)}}{2 \cdot 2}$$

Aufpassen muss man hier bei den Vorzeichen. Insbesondere falls b negativ ist. Dies ergibt:

$$x_1 = -6, \qquad x_2 = 5$$

Übungen

Aufgabe	Lösung
$-x^2 - x + 20 = 0$	$x_1 = 4, \qquad x_2 = -5$
$2x^2 + 32x + 96 = 0$	$x_1 = -12, \qquad x_2 = -4$
$\frac{3}{2}x^2 + \frac{33}{2}x = -36$	$x_1 = -8, \qquad x_2 = -3$
$-x^2 = -\frac{3}{2}x - 1 = 0$	$x_1 = -\frac{1}{2}, \qquad x_2 = 2$
$4x^2 + 11x = 2x^2 + x + 72$	$x_1 = -9, \qquad x_2 = 4$
$-x^2 - 21x = 108$	$x_1 = -18, \qquad x_2 = 1$