Quadratische Funktionen

1.Definition:

Eine Funktion der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$
heißt quadratische Funktion.

2.Merke:

Der Graph einer quadratische Funktion ist eine Parabel. Diese ist durch drei Punkte oder den Scheitel und einen weiteren Punkt eindeutig festgelegt.

3.Nullstellen:

Schnittstellen (Nullstellen) einer Parabel mit der x-Achse ermittelt man durch Lösen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Die Lösungen können mit der folgenden Formel ermittelt werden:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Den Term $(b^2 - 4ac)$ nennt man Diskriminante D. Die quadratische Funktion besitzt für:

- D>0 zwei Nullstellen
- D=0 eine Nullstelle
- D<0 keine Nullstelle

Gibt es Lösungen (Nullstellen) x_1 und x_2, so kann der Funktionsterm $ax^2 + bx + c$ in Linearfaktoren zerlegt werden:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{mit } a \neq 0$$

- für a>0 ist die Parabel nach oben geöffnet
- für a<0 ist die Parabel nach unten geöffnet

4.Beispiele:

a) Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = 2(x - 5)(x + 1)$.
Ermitteln Sie die Nullstellen.

$$2\underbrace{(x-5)}_{0}\underbrace{(x+1)}_{0} = 0$$

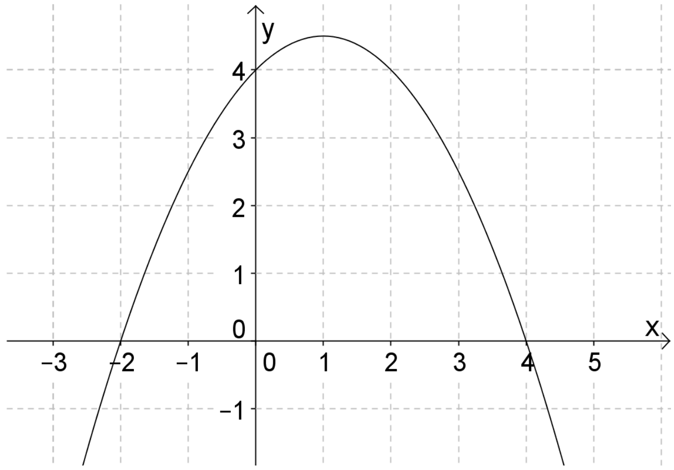
$x - 5 = 0$ *oder* $x + 1 = 0$
$x_1 = 5$ *oder* $x_2 = -1$

b) Die Parabel p besitzt die Nullstellen $x_1 = -2$ sowie $x_2 = 4$ und verläuft durch den Punkt $P(1|3)$. Ermitteln Sie eine Gleichung der Parabel p.

- *Die Aussage über die Nullstellen liefert den Ansatz:*
  $$p(x) = a(x + 2)(x - 4)$$
- *Einsetzen des Punktes $P(1|3)$ in die Funktionsgleichung:*
  $$3 = a(1 + 2)(1 - 4) \qquad \rightarrow a = -\frac{1}{3}$$
- *Funktionsgleichung der quadratischen Funktion f.*
  $$p(x) = -\frac{1}{3}(x + 2)(x - 4)$$

c) Gegeben ist der Graph einer quadratischen Funktion f. Ermitteln Sie zugehörige Funktionsgleichung. (Schnittstellen sind hier ganzzahlig)

- *Ablesen der Nullstellen liefert den Ansatz:*
  $$f(x) = a(x+2)(x-4)$$
- *Einsetzen eines Punktes z.B. $P(0|4)$ in die Funktionsgleichung:*
  $$4 = a(0+2)(0-4); \qquad a = -\frac{1}{2}$$
- *Funktionsgleichung von f:*
  $$f(x) = -\tfrac{1}{2}(x+2)(x-4)$$
  oder ausmultipliziert:
  $$f(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 + x + 4$$



d) Gegeben ist die quadratische Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -x^2 + 3x + 10$. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

- *Ablesen der Parameter $a = -1$; $b = 3$ und $c = 10$ aus der allgemeinen Form $f(x) = ax^2 + bx + c$*
- *Einsetzen der Parameter in die Lösungsformel* $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$*:*

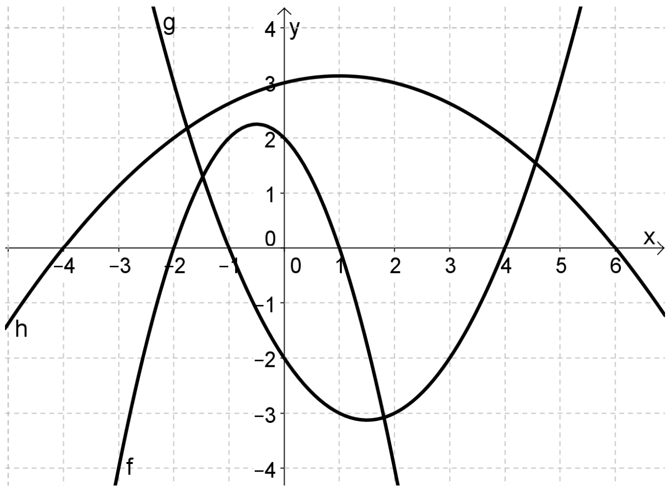
$$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 10}}{2\cdot(-1)} \qquad x_1 = -2; \quad x_2 = 5$$

5.Aufgaben

a) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 8$. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

b) Der Graph der quadratischen Funktion g schneidet die x-Achse bei $x_1 = 3$ und $x_2 = 0$. Zudem verläuft der Graph durch den Punkt $P(1|5)$. Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g.

c) Gegeben Sie die folgenden Graphen quadratischer Funktionen. Bestimmen Sie die jeweiligen Funktionsgleichungen:(Schnittstellen sind hier ganzzahlig)



6.Lösungen:

a) $x_1 = 4$; $x_2 = -8$; b) $g(x) = -2{,}5x^2 + 7{,}5x$

c) $f(x) = -x^2 - x + 2$; $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1{,}5x - 2$; $h(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 3$