Lineare Funktionen

1. Definition

Eine Funktion f mit der Funktionsgleichung y = mx + t bzw. f(x) = mx + t ; m, t $\in$ R

heißt lineare Funktion. Ihr Graph ist eine Gerade mit der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt t.

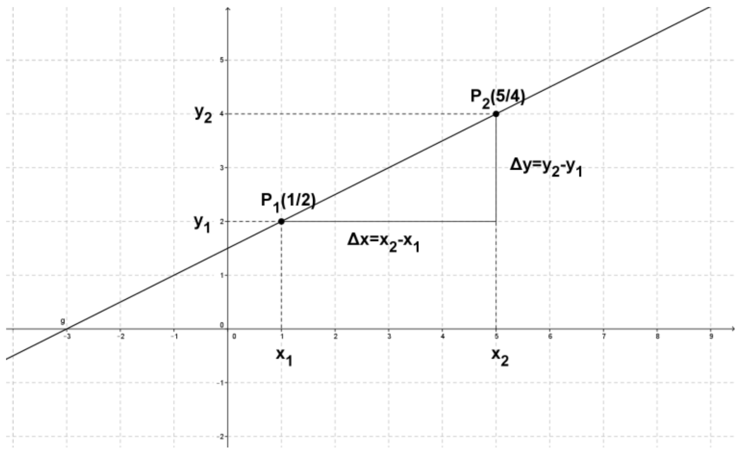
2. Bestimmung einer Geradengleichung

Eine Gerade ist durch zwei Punkte $P_1(x_1/ y_1)$ und $P_2(x_2/ y_2)$ oder durch einen Punkt und die Steigung m der Geraden eindeutig festgelegt. Die Funktionsgleichung einer Geraden lautet:

$$y = mx + t \quad m,t \in \mathbf{R}$$

Für die Steigung m der Geraden gilt dann: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; t heißt y-Achsenabschnitt

Beispiel 1: Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g, die durch die Punkte $P_1(1/2)$ und $P_2(5/4)$ verläuft..



- Bestimmung der Steigung m:
  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{5-1} = \frac{1}{2}$
- Einsetzen von m und z.B. von $P_1(1/2)$ in die Geradengleichung y = mx +t:
  $2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + t$;
  t = 1,5 (y-Achsenabschnitt)
  Die gesuchte Geradengleichung lautet: $y = \frac{1}{2}x + 1,5$

Beispiel 2: Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden g mit der Steigung 2 durch den Punkt P(-1/2)

<u>Lösung:</u> Einsetzen von m = 2; $x_0 = -1$ und $y_0 = 2$ in die Geradengleichung y = mx + t ergibt

$2 = 2 \cdot (-1) + t \Leftrightarrow t = 4$; die Gleichung der Geraden g lautet also $y = 2x + 4$

3. Besondere Geraden und ihre Gleichungen:

- x-Achse: **y = 0**; y-Achse: **x = 0**
- Parallele zur x-Achse durch den Punkt (0/t): **y = t**
- Parallele zur y-Achse durch den Punkt (a/0): **x = a** ; a $\in$ R
- Winkelhalbierende des I./III. Quadranten: **y = x**
- Winkelhalbierende des II./IV. Quadranten: **y = -x**

4. <u>Bestimmung der Schnittpunkte zweier Geraden (= gemeinsame Punkte)</u>

4.1 Schnittpunkt einer Gerade mit der y-Achse

Bedingung: x = 0 $\Rightarrow S_y(0/t)$

Beispiel: y = 3x + 2 $\wedge x = 0 \Rightarrow$ y = 2 $\Rightarrow S_y(0/2)$

4.2 Schnittpunkt mit der x-Achse (die Schnittstelle mit der x-Achse nennt man Nullstelle)

Bedingung : y = 0 $\Rightarrow S_x(-\frac{t}{m}/0)$

Beispiel: y = 3x + 2 $\wedge$ y = 0 $\Rightarrow$ 0 = 3x + 2 $\Rightarrow x = -\frac{2}{3}$ (Nullstelle!!)

$S_x(-\frac{2}{3}/0)$

4.3 Schnittpunkt von zwei Geraden

Ein gemeinsamer Punkt S(x/y) zweier Geraden g(x) und h(x) liegt vor, wenn beide Geraden den gleichen y-Wert g(x)= h(x) an der Stelle x aufweisen. Man erhält die Koordinaten des Punktes also durch

1. Gleichsetzen der Funktionsgleichungen g(x) = h(x) und Auflösen nach x
2. Einsetzen der erhaltenen x-Koordinate in eine der beiden Geradengleichungen

Zwei Geraden können

- sich schneiden (1 Schnittpunkt)
- parallel sein (keine Lösung, d.h. beim Gleichsetzen und Auflösen nach y ergibt sich ein Widerspruch – falsche Aussage)

Beispiel 1: Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Geraden g(x) = 3x + 2 und h(x) = - x – 6

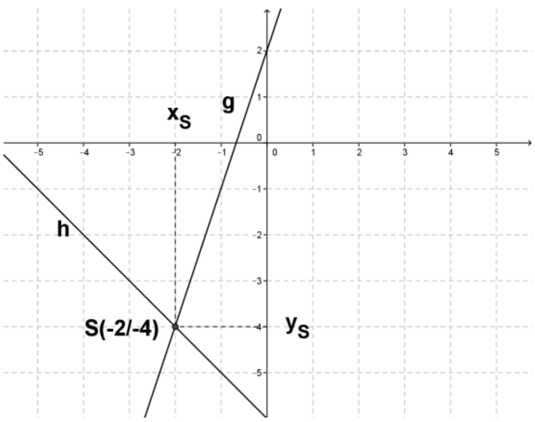
<u>Lösung:</u> Gleichsetzen $3x + 2 = -x - 6$

Auflösen nach x $4x = -8$

$x = -2$ (x-Koordinate)

Einsetzen in g: $y = g(-2) = 3 \cdot (-2) + 2 = -4$

$\Rightarrow$ S(-2/-4)



Aufgaben

1 Zeichnen Sie die Geraden g: $x = 2$, h: $y = 3$, w_1: $y = x$ und w_2: $y = -x$ in ein Koordinatensystem.

2 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der linearen Funktion, deren Graph durch die Steigung m und den Punkt P festgelegt ist.

a) P(– 4/1), $m = \frac{1}{2}$ b) P(2/ – 3), $m = -\frac{1}{4}$

3 Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die Punkte P und Q.

a) P(–1/1), Q(2/0) b) P(2/3), Q(4/4) c) P(4/5), Q(–1/5)

4 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Geraden f und g

a) $f(x) = 5x - 3$ und $g(x) = -3x - 1$

b) $f(x) = \frac{2}{7}x + 2$ und $g(x) = \frac{2}{3}x + 4$

c) $f(x) = -2x + 3$ und $g(x) = 1 - 2x$

5 Berechnen Sie die Nullstelle folgender Funktionen

a) $f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$

b) $f(x) = 3x + 5$

c) $f(x) = -2$

6 Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte folgender Geradenscharen in Abhängigkeit von t, $t \in R$

a) $f_t(x) = tx + 3 - t$

b) $f_t(x) = -tx + t$

7 Berechnen Sie den Schnittpunkt folgender Funktionen in Abhängigkeit von t. ($t \in R$)

a) $f_t(x) = tx + 3 - t$ und $g(x) = 2x + 1$

b) $f_t(x) = -tx + t$ und $g(x) = x - 2$

8 Ein Opernsänger kann zwischen zwei Verträgen wählen. Bei Vertrag 1 erhält er einen Grundbetrag von 5000 € und zusätzlich 0,15 € pro Besucher. Bei Vertrag 2 erhält er pauschal 3000 € und 0,35 € pro Besucher.

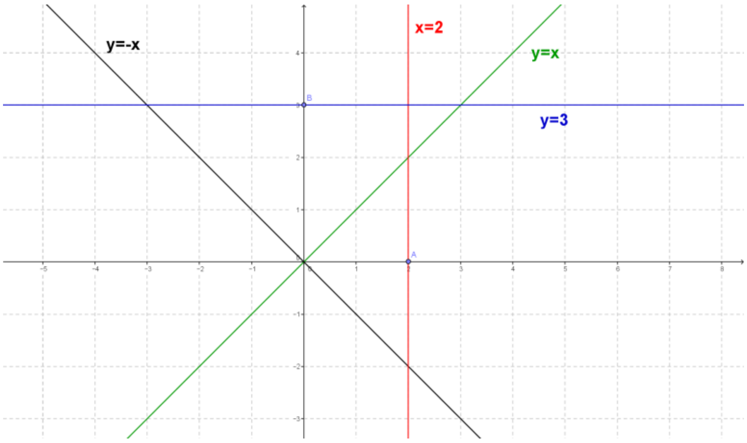
a) Stellen Sie die Funktionsgleichung für die Einnahmen $E_1(x)$ und $E_2(x)$ in Abhängigkeit der Anzahl x der Besucher auf.

b) Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen in ein Koordinatensystem mit geeignetem Maßstab.

c) Berechnen Sie, bei welchen Besucherzahlen Vertrag 1 günstiger ist.

Lösungen

1



2 a) y = $\frac{1}{2}$x + 3 b) y = $-\frac{1}{4}$x – 2,5

3 a) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ b) y = 0,5x + 2 c) y = 5

4 a) S($\frac{1}{4}/-\frac{7}{4}$) b) S($-\frac{21}{4}/\frac{1}{2}$) c) kein Schnittpunkt, die Geraden sind parallel

5 a) x = 2 b) $x = -\frac{5}{3}$ c) keine Nullstelle

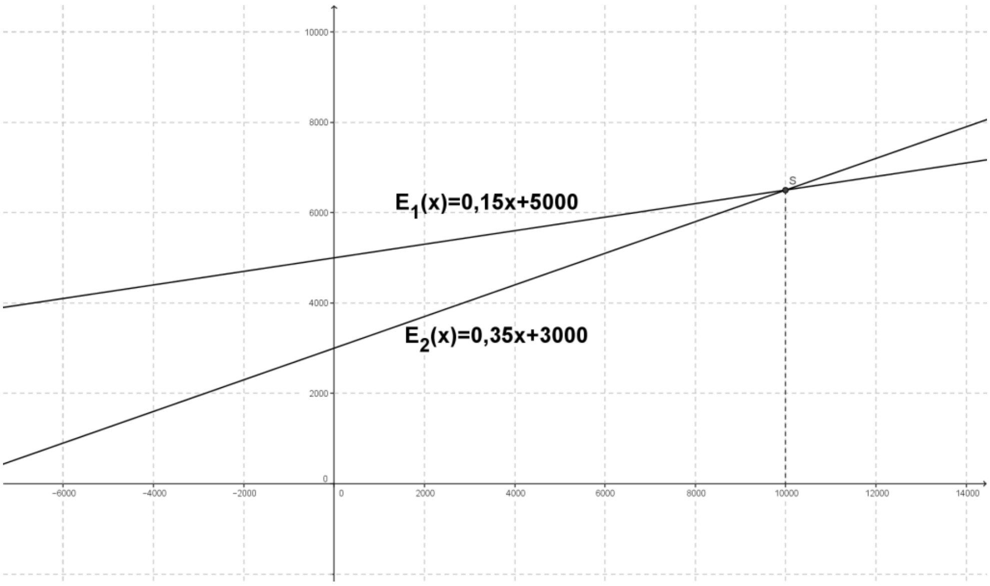
6 a) $S_y(0/3-t), S_x(\frac{t-3}{t}/0)$ für $t \neq 0$ b) $S_y(0/t), S_x(1/0)$ für $t \neq 0$

7 a) t = 2: Geraden sind identisch, unendlich viele Schnittpunkte; $t \neq 2$: S(1/3)

b) t = -1: kein Schnittpunkt (parallele Geraden); $t \neq -1$: S($\frac{t+2}{t+1}/\frac{-t}{t+1}$)

8 a) $E_1(x)$= 0,15x + 5000 und $E_2(x)$ = 0,35x + 3000

b)



c) für $0 \leq x \leq 10000$ *ist* $E_1(x) \geq E_2(x)$