

Lineare Gleichungen

1. Grundlagen und Begriffe

- Werden zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen verbunden, so spricht man von einer Gleichung.
- Die Menge der Zahlen aus der Definitionsmenge, die eine Gleichung beim Einsetzen in eine wahre Aussage überführen, heißt Lösungsmenge.
- Gleichungen, die die gleiche Lösungsmenge haben, heißen äquivalent.
- Lineare Gleichungen sind Gleichung, in denen die Unbekannte x ausschließlich in der 1. Potenz vorkommt, also z. B.:
$$5x - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5x^1 - 8 = 0$$

oder:
$$2x - 3 + 4x = 7,5x - 3$$

2. Regel:

Wird auf beiden Seiten einer Gleichung derselbe Term addiert oder subtrahiert, so erhält man eine äquivalente Gleichung.
Werden beide Seiten einer Gleichung mit demselben Term ($\neq 0!$) multipliziert oder dividiert, so erhält man eine äquivalente Gleichung.

Achtung:

Man darf niemals durch eine Zahl oder Term = 0 teilen!!!!

3. Beispiele

(durchgerechnet und erklärt)

<u>Aufgabe 1:</u> $4x - 4 = -8 - 6x \quad + 6x$ $10x - 4 = -8 \quad + 4$ $10x = -4 \quad : 10$ <u>$x = -0,4$</u> $L = \{-0,4\}$	<u>Erklärungen</u> Hinter der „Kommando-Zeile“ „ “ wird bei jedem Schritt angegeben, welche Zahl addiert, subtrahiert, multipliziert bzw. dividiert wird. <u>Ziel:</u> Alle Terme mit der Unbekannten x auf eine Seite bringen.
---	--

<p><u>Aufgabe 2:</u> $7(x-4)-3(5x-2) = 11(2x-7)-4x-4(5+x)$</p> <p>$7x - 28 - 15x + 6 = 22x - 77 - 4x - 20 - 4x$ $-8x - 22 = 14x - 97 \quad -14x$ $-22x - 22 = -97 \quad +22$ $-22x = -75 \quad : (-22)$ $x = \frac{75}{22}$ $L = \left\{ \frac{75}{22} \right\}$</p> <p><u>Aufgabe 3:</u> $2x + 8 - 6x = 6 - 4x \quad -8$ $2x - 6x = -2 - 4x \quad + 4x$ $0 = -2 \quad (\text{falsche Aussage!})$ $L = \{ \} \quad (\text{leere Menge!})$</p> <p><u>Aufgabe 4:</u> $4(x+5) - 4 = 6(x+3) - 2x - 2$ $4x + 20 - 4 = 6x + 18 - 2x - 2$ $4x + 16 = 4x + 16 \quad - 4x + 16$ $0 = 0$ (wahre Aussage, unabhängig von jeder beliebigen Zahl x!) $L = \square$ falls \square Grundmenge bzw. $L = \square$ falls \square Grundmenge</p>	<p>Nach den Rechenregeln der Termumformungen vereinfachen und zusammenfassen.</p> <p>Es gibt keine Zahl x, die die Ausgangsgleichung erfüllen kann. Diese Gleichung heißt n i c h t erfüllbar.</p> <p>Jede denkbare Zahl x erfüllt diese Ausgangsgleichung!</p> <p><u>Grundmenge</u> ist die Menge der Zahlen, die für die Lösung der Gleichung zur Verfügung stehen. (siehe „Terme“!)</p>
---	---

4. Aufgaben (Grundmenge $\{x \in \square\}$)

- 4.1 $8x+7 = 6x+25$
4.2 $5x + 10 + 3(x-7) = -3(9x+3)+2x$
4.3 $5x - 3(2x-3) = 6 - x$
4.4 $12 - (x-3) - 5x = 8 - 2x - 4x - 5 + 12x$
4.5 $2(x+2) = 3x-2(x-1)$
4.6 $2(3x-10) = -3\left(\frac{20}{3}-2x\right)$
4.7 $-6x+7 = -7(x-3)$

5. Lineare Gleichungen mit zusätzlichem Parameter

<p><u>Beispiel:</u></p> $(6-a)x + 7(x-5) = 5 - 3(x+3) + x(a-6)$ $6x - ax + 7x - 35 = 5 - 3x - 9 + ax - 6x$ $13x - ax - 35 = -9x + ax - 4 \quad +9x - ax + 35$ $22x - 2ax = 31$ $x(22-2a) = 31 \quad : (22-2a) \neq 0!$ $x = \frac{31}{22-2a} \text{ nur für } a \neq 11 \text{ gültig!!!}$ <p>Sonderfall: $a = 11$</p> $(6-11)x + 7(x-5) = 5 - 3(x+3) + x(11-6)$ $-5x + 7x - 35 = 5 - 3x - 9 + 5x \quad $ $-35 = -4 \text{ (falsche Aussage!)}$ $\Rightarrow L = \{ \} \text{ nur falls } a \neq 11 \text{ !!!!}$	<p><u>Erklärungen</u></p> <p>Der Parameter a ist eine beliebige Zahl $a \in \square$</p> <p>Ausmultiplizieren und zusammenfassen wie bisher!</p> <p>Weitere Lösung nur durch Ausklammern von x möglich!</p> <p><u>Achtung!</u> Teilen durch 0 ist grundsätzlich nicht möglich, deshalb gilt die Bedingung: $22-2a \neq 0$</p> <p>Die Zahl $a = 11$ muss nun in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden!</p>
---	---

6. Aufgaben:

6.1 $k(x+2) = 3x - 2(x-1)$

6.2 $4x(2+k) - 5 = x + 1$

7. Lösungen zu Kapitel 4.:

Zu 4.1: $x = 9$

Zu 4.2: $x = \frac{2}{33}$

Zu 4.3: $L = \{ \}$

Zu 4.4: $x = 1$

Zu 4.5: $x = -2$

Zu 4.6: $L = \square$

Zu 4.7: $x = 14$

8. Lösung zu Kapitel 6.:

Zu 6.1: $x = -2$ falls $k \neq 1$

$L = \square$ falls $k = 1$

Zu 6.2: $x = \frac{6}{7+4k}$ falls $k \neq -\frac{7}{4}$

$L = \{ \}$ falls $k = -\frac{7}{4}$

Lineare Ungleichungen

1. Grundlagen und Begriffe

Ungleichungen entstehen, wenn Terme durch die Zeichen $<$ (kleiner), $>$ (größer), \leq (*kleiner oder gleich*) oder \geq (*größer oder gleich*) verbunden werden.

Beispiele:

$$4 \cdot 3 < 30$$

$$a < b + 5$$

$$5x > 2x + 2$$

$$2x + 2 \leq -4$$

2. Regeln:

2.1 Addiert und subtrahiert man auf beiden Seiten einer Ungleichung dieselbe Zahl, so erhält man eine äquivalente Ungleichung (siehe „Lineare Gleichungen“).

$$\text{z. B. } 2x + 2 > x \quad | -2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > x - 2 \quad | -x \quad \Leftrightarrow \quad x > -2$$

2.2 Multipliziert oder dividiert man auf beiden Seiten einer Ungleichung mit der gleichen positiven Zahl ($>0!$), so erhält man ebenfalls eine äquivalente Ungleichung (siehe „Lineare Gleichungen“).

$$\text{z. B. } 4x < 8 \quad | : 4 \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$$

2.3 Multipliziert oder dividiert man auf beiden Seiten einer Ungleichung mit der gleichen **negativen** Zahl, so muss man das Kleiner- bzw. Größerzeichen **umdrehen**, um eine äquivalente Ungleichung zu erhalten.

$$\text{z. B. } -4 > -8 \quad | *(-1) \quad \Leftrightarrow \quad 4 < 8$$

An diesem einfachen Beispiel soll die Regel klar ersichtlich werden!

$$-4x > 8 \quad | : (-4) \quad \Leftrightarrow \quad x < -2$$

3. Beispiele:

(durchgerechnet und erklärt)

<u>Aufgabe 1:</u>	<u>Erklärungen</u>
$3x - 4 < x + 6 \quad +4$	Addieren und subtrahieren analog wie bei linearen Gleichungen! Da der Teiler 2 positiv ist, ändert sich das Kleiner- bzw. Größerzeichen nicht.
$\Leftrightarrow 3x < x + 10 \quad -x$	
$\Leftrightarrow 2x < 10 \quad : 2 \quad (\text{positiv!})$	
$\Leftrightarrow x < 5$	
<u>Aufgabe 2:</u> $(x-5)(x+3) > x^2 + 4x - 3$	Ausrechnen und zusammenfassen wie bisher! Achtung: Dividieren mit einer negativen Zahl!!!!
$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 > x^2 + 4x - 3 \quad -x^2$	
$\Leftrightarrow -2x - 15 > 4x - 3 \quad -4x + 15$	
$\Leftrightarrow -6x > 12 \quad : (-6)$	
$\Leftrightarrow x < 2$	

4. Aufgaben:

$$4.1 \quad 3+2x \leq -7 -3x$$

$$4.2 \quad -6x +2 < 4x -4$$

$$4.3 \quad 3(x+3)(x-5) > -9 +15x + 3x^2$$

$$4.4 \quad 2x+2,5 \leq 6x-1,5$$

5. Lösungen:

$$5.1 \text{ Zu 4.1: } x \leq -2$$

$$5.2 \text{ Zu 4.2: } x > 0,6$$

$$5.3 \text{ Zu 4-3: } x < -\frac{12}{7}$$

$$5.4 \text{ Zu 4.4: } x \geq 1$$